# ANÁLISIS MATEMÁTICO II

**Examen Final 10/05/2024**

**APELLIDO DEL ALUMNO: ............................................ NOMBRE: ...................................**

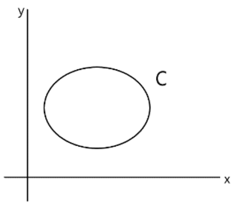
**CORRIGIÓ: ....................................................... REVISÓ: .....................................................**

| T1 | T2 | P1 | P2 | P3 | P4 | CALIFICACIÓN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.***
***No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas***
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

---

T1- a) Enuncie y demuestre la condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo.
Proponga un ejemplo de campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que admita función potencial y obtenga el valor (dando la justificación correspondiente) de la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C graficada:




T2- a) Defina superficie parametrizada y punto regular de la misma.
b) Siendo $\vec{F}(u, v) = (u - v, u + v, 2u^2 + 2v^2)$ la parametrización de una superficie $\Sigma$, analice si $(1, 1, 2)$ es punto regular de $\Sigma$.

P1- Calcule la circulación $\oint_{C_F} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x, y) = (x + 2y, g(y) - x)$ con $g \in C^1$ y $C_F$ la curva frontera del recinto limitado por $y = 2x + 1$, y la curva solución de $2xy\,dx - y\,dy = 0$ cuya la recta tangente en el punto $(1, y_0)$ es $y = 2x$.
En un gráfico, indique el sentido considerado para $C_F$

P2- Sea $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $xz + z + y + \ln(z - xy) = 10$.
Halle la ecuación la recta normal al grafico de $f$ en $(2,1, f(2,1))$ y analice si corta a la superficie de ecuación $x + y^2 = 7$ (en caso afirmativo obtenga el o los puntos de intersección ).

P3- Calcule el flujo de $\bar{f}(x, y, z) = (g(y, z), h(x, z), z)$ a través de la superficie abierta S de ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$, con $z \leq 2$, siendo $g \wedge h \in C^1$ y S orientada con versor normal de tercer componte positiva.

P4- Exprese, mediante una integral múltiple, el volumen del cuerpo limitado por $z = 0$, $x = y^2$ y el plano normal a la curva C en $(3,3,6)$, sabiendo que C queda definida por la intersección de $y = 3$ con $x + 1 = (z - 4)^2$.

UTN.BA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

# ANÁLISIS MATEMÁTICO II

**Examen Final** **10/05/2024**

**APELLIDO DEL ALUMNO:** Declich **NOMBRE:** Francisco

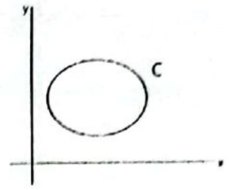
**CORRIGIÓ:** Victor **REVISÓ:** ..........

| T1 | T2 | P1 | P2 | P3 | P4 | CALIFICACIÓN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B- | B | B✓ | B | B | 9 (NUEVE) |

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.***
***No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas***
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

---

T1- a) Enuncie y demuestre la condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo.
Proponga un ejemplo de campo $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que admita función potencial y obtenga el valor (dando la justificación correspondiente) de la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C graficada:




T2- a) Defina superficie parametrizada y punto regular de la misma.
b) Siendo $\vec{F}(u, v) = (u - v, u + v, 2u^2 + 2v^2)$ la parametrización de una superficie $\Sigma$, analice si $(1, 1, 2)$ es punto regular de $\Sigma$.

P1- Calcule la circulación $\oint_{C_F} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x, y) = (x + 2y, g(y) - x)$ con $g \in C^1$ y $C_F$ la curva frontera del recinto limitado por $y = 2x + 1$, y la curva solución de $2xy\,dx - y\,dy = 0$ cuya la recta tangente en el punto $(1, y_0)$ es $y = 2x$.
En un gráfico, indique el sentido considerado para $C_F$

P2- Sea $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $xz + z + y + \ln(z - xy) = 10$.
Halle la ecuación la recta normal al grafico de $f$ en $(2, 1, f(2, 1))$ y analice si corta a la superficie de ecuación $x + y^2 = 7$ (en caso afirmativo obtenga el o los puntos de intersección ).

P3- Calcule el flujo de $\bar{f}(x, y, z) = (g(y, z), h(x, z), z)$ a través de la superficie abierta S de ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$, con $z \leq 2$, siendo $g \wedge h \in C^1$ y S orientada con versor normal de tercer componte positiva.

P4- Exprese, mediante una integral múltiple, el volumen del cuerpo limitado por $z = 0$, $x = y^2$ y el plano normal a la curva C en $(3, 3, 6)$, sabiendo que C queda definida por la intersección de $y = 3$ con $x + 1 = (z - 4)^2$.

Decidí

(T1) (a) Para que un campo f vectorial sea conservativo, su rotor debe ser igual al vector nulo y debe admitir función potencial $C^2$.

Si: $\phi(x,y) = x^2+y^2$ → función $C_2$

$\nabla \phi(x,y) = (2x, 2y)$

Si: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (2x, 2y) = (\phi'_x, \phi'_y)$

puedo decir que $\phi$ es su función potencial

como es $C_2$, por el teo. de Schwartz, $\phi_{xy} = \phi_{yx}$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} =$$

$= 0 - 0 = 0 = Q'_x - P'_y = \phi'_{yx} - \phi'_{xy} = 0$

Teo. Green

$$\iint_{A \text{ círculo}} (Q'_x - P'_y)\,dA = \iint_A 0 \cdot dA = 0$$

→ como el círculo es cerrado y el dominio es SC, $\oint f\,dr = 0$

Decli ch

(T2) (a) Superficie parametrizada y punto regular de la misma

Aquella que es expresada por una función que delimita a la superficie
Suele reducir las incógnitas

En aquel punto donde se puede trazar un plano tangente porque la función que lo describe es diferenciable en ese punto. No puede tener picos, ser no derivable o no ser continua la función en ese punto.
Puedo trazar un vector $\vec{n}$ (normal) que sea distinto de $\vec{0}$ en ese punto.

T2 b) $\vec{F}(u,v)=(u-v,\ u+v,\ 2u^2+2v^2)$

$F'_u=(1,1,4u)$

$F'_v=(-1,1,4v)$

$F'_u \times F'_v=(4v-4u,\ -(4v+4u),\ 1+1)=$

$=(4v-4u,\ -4v-4u,\ 2)=\vec{n}(u,v)$

Analizo punto $(1,1,2)=P_0$

$u-v=1 \rightarrow u=1+v$

$u+v=1 \rightarrow 2v+1=1$

$2v=0$

$v=0 \rightarrow u=1$

$2u^2+2v^2=2$

Da bien

$z=2$

Lo evalúo en la $\vec{n}(u,v)$ al $(1,0)$

$\vec{n}(1,0)=(-4,-4,2)$

es distinto de 0, así que puedo decir que $P_0$ es regular

$(-4,-4,2)\cdot((x,y,z)-(1,1,2))=0$

plano tangente.

$\operatorname{rot}\vec{F} = Q'_x - P'_y = -1 - 2 = -3$

Decidir

(P1) $\vec{F}(x,y) = (x + 2y, g(y) - x) \quad g \in C^1$

Recinto limitado por
$$\begin{cases} \bullet\ y = 2x + 1 \\ \bullet\ \text{curva solución } 2xy\,dx - y\,dy = 0 \\ \quad \text{cuya recta tg. en } (1, y_0) \text{ es } y = 2x \end{cases}$$

C es el borde del recinto

$2x\cancel{y}dx = \cancel{y}dy$

$\int 2x\,dx = \int dy$

$2\frac{x^2}{2} + C = y$

$x^2 + C = y$

pasa por $(1,2)$

$1 + C = 2$

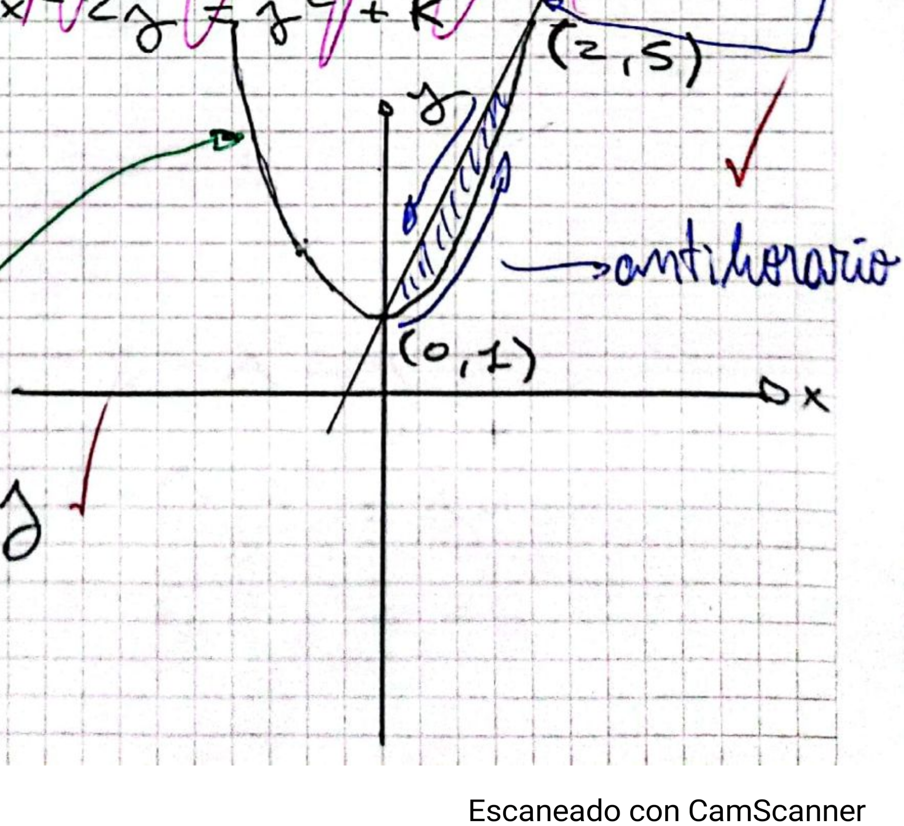
$C = 1 \rightarrow x^2 + 1 = y$

$2xy\,dx = y\,dy$

$\int 2xy\,dx = \int y\,dy$

$2y\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$

$x^2 2y = y^2 + K$



T. Stokes

$$\int_0^2 \int_{x^2+1}^{2x+1} \underbrace{-3}_{\text{de } Q'_x - P'_y} \cdot dy\,dx =$$

$$= -3 \int_0^2 \left[ 2x+1 - x^2 - 1 \right] dx =$$

$$= -3 \left[ -\frac{8}{3} + \cancel{2}\frac{4}{\cancel{2}} \right] = 8 - 12 = \boxed{-4}$$

Dedich

(P2) $z = f(x,y)$ $\quad \underline{xz + z + y + \ln(z - xy) = 10}$

$F(x,y,z)$

$\nabla$

$$\nabla F = \left( z - \frac{y}{z-xy},\ 1 - \frac{x}{z-xy},\ x+1+\frac{1}{z-xy} \right)$$

- $f(2,1) \longrightarrow 2z + z + 1 + \ln(z-2) = 10$

$z = 3$ resuelve

$$\nabla F(2,1,3) = \left( 3 - \frac{1}{1},\ 1 - \frac{2}{1},\ 2+1+\frac{1}{1} \right) =$$

$= (2, -1, 4)$ ✓

- $(2,1,3) + \lambda(2,-1,4) = (x,y,z)$

(Ec. de recta normal en el punto)

¿Corta con $x + y^2 = 7$?

$2 + 2\lambda = x = 7 - y^2$

$\lambda = \dfrac{5 - y^2}{2} \longrightarrow 1 - \lambda = y$

$0 = y^2 + 2y + 3$ $\leftarrow$ $1 - \dfrac{(5 - y^2)}{2} = y$

$2 - 5 + y^2 = 2y$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$0 = z^2 + 2z + 3$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2}$$

dis negativo (no tiene raíces reales)

No cruza la recta con la superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$

Escaneado con CamScanner

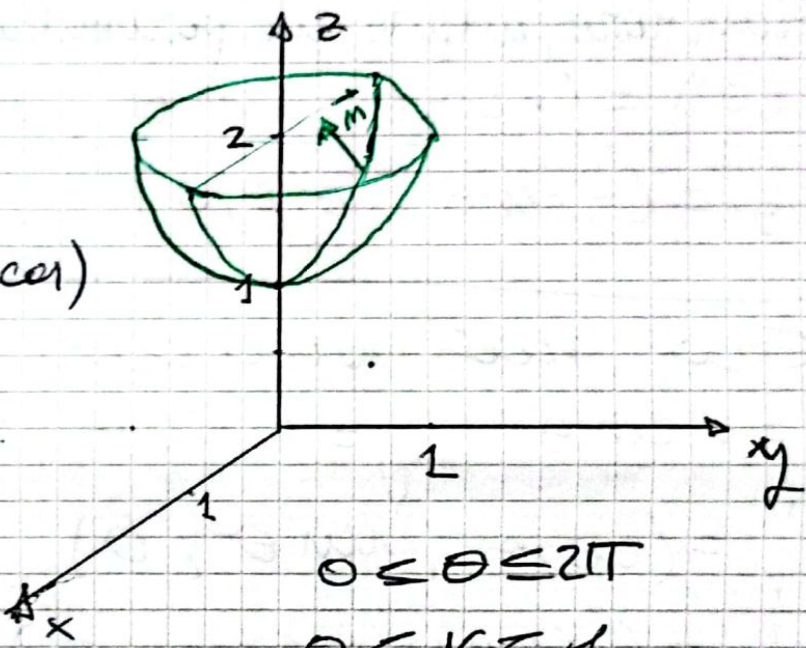
Deelich

(P3) $\vec{p}(x,y,z) = (g(y,z),\ h(x,z),\ z)$

$div\ f = 1 = P'_x + Q'_y + R'_z = 1$

Superficie abierta $z = 1 + x^2 + y^2$

con $z \leq 2$




Con coordenadas polares (cilíndricas)

$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\,\theta$

$z = z$

$\|DJ\| = r$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 2$

$1 + r^2 \leq z \leq 2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+r^2}^{2} \underbrace{1}_{\to\ div F} \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 [2r - r - r^3]\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [r - r^3]\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] d\theta = \frac{1}{2}\pi \to \text{Flujo sobre sup. + tapa}$$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z \\ g(y,z) & h(x,z) & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-h'_z(x,z),\ g'_z(y,z),\ h'_x(x,z) - g'_y(y,z)\right)$$

Muy raro, intento una parametrización.

$\phi(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2)$

$\phi'_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

---

Era más sencillo.

$x = r\cos\theta \quad y = r\operatorname{sen}\theta \quad z = 2$

$\phi'_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$

$\phi'_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$\|\phi'_r \times \phi'_\theta\| = \cancel{r}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(\underbrace{*, *}_{}, 2) \cdot (0,0,1) \cdot r\, dr\, d\theta$$

no importan porque los multiplico por 0.

$$\int_0^{2\pi} 2\frac{1}{2}\, d\theta = 2\pi$$

$\underbrace{\frac{1}{2}\pi}_{\text{Todo}} - \underbrace{2\pi}_{\text{Tapa}} = \boxed{\underbrace{\frac{-3}{2}\pi}_{\text{Vaso}}}$

$\frac{3}{2}\pi$ — como pide $\vec{n}$ hacia el interior, en realidad es...!

Dedich

(P4) $z=0$
$x=y^2$

plano normal a C en $(3,3,6)$

C es la intersección de $\begin{cases} y=3 \\ x+1=(z-4)^2 \end{cases}$

$x=z^2-8z+15$

~~$0=z^2-8z+15-x$~~

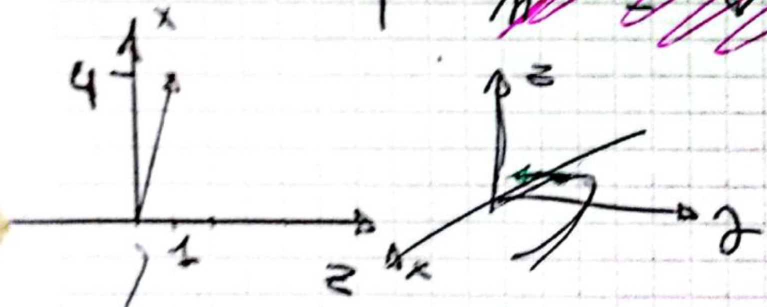
~~$F(x,y,z)$~~

~~$\nabla F=(-1,0,2z-8)$~~

~~$\vec{n}=\nabla F(3,3,6)=(-1,0,4)$~~

$2z-8=x'$
en $(3,3,6)$

$4=$ pendiente de la C en el punto




vector $(4,0,1)$ → lo tomo como la $\vec{n}$ del plano normal

$(4,0,1)\cdot(\vec{x}-(3,3,6))=0$

C.A

$(4,0,1)\cdot((x,y,z)-(3,3,6))=0$

$x=0$

$4\cdot(-3)+z-6=0$

$z=18$

$z=0$

$4\cdot(x-3)-6=0$

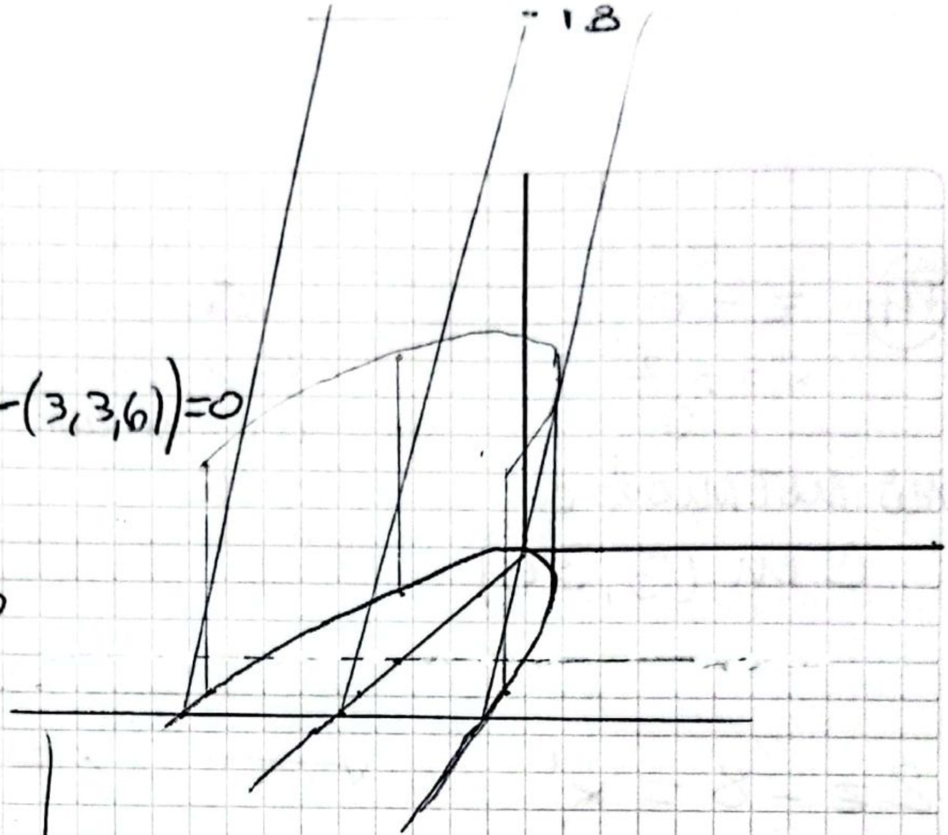
$4x=18$

$x=\frac{9}{2}=4{,}5$

$4\cdot(x-3)+z-6=0$

$4x-12+z-6=0$

$z=18-4x$




$$\int_0^{9/2}\int_0^{18-4x}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dz\,dx$$